L'oral à l'agrégation - Isenmann (p.302)

Théorème de Liapounov

156 215
170 220
171 221

Lemme : Soit $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de vp de partie réelle strictement négatives

Alors : $\exists \alpha > 0 \mid \exists \lambda > 0 \mid \forall t \in \mathbb{R}_+, \|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$

Théorème : (de Liapounov) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $d_0 f$ a toutes ses vp de partie réelle strictement négative.

Alors : 0 est point d'équilibre stable du système $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ i.e. pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$, suffisamment proche de 0, la solution maximale y est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et tend exponentiellement vite vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Preuve :

oral

L'idée centrale pour ce développement est de trouver B forme bilinéaire, symétrique définie positive induisant une norme $\|\cdot\|_q$ pour q et obtenir l'inégalité $(q \circ y)'(t) \leq -\beta \|y(t)\|_q$.
On montre alors que y solution maximale est :
(i) définie sur $\mathbb{R}_+$
(ii) convergente exponentiellement vers 0 en $+\infty$.

① Soit $A = d_0 f$ et $B : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x;y) \mapsto \int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x ; e^{tA}y \rangle dt \end{array}$ telle que :

(i) B bien définie : bilinéaire, symétrique
$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle e^{tA}x ; e^{tA}y \rangle| \leq \|e^{tA}x\| \, \|e^{tA}y\|$ (par Cauchy-Schwarz)
$\leq C \|x\| \|y\|$ (par le lemme)

Ainsi, l'intégrale est absolument convergente et alors B est bien défini.

(ii) B est définie positive
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $B(x;x) = \int_0^{+\infty} \|e^{tA}x\|^2 dt \geq 0$
Ainsi, $B(x;x) = 0$ ssi $\|e^{tA}x\|^2 = 0$
ssi $x = 0$

(iii) B définie une forme quadratique et une norme sur $\mathbb{R}^n$.
On définit $q : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto B(x;x) \end{array}$ forme quadratique associée à B et sa norme : $\|x\|_q := \sqrt{q(x)} = \sqrt{B(x;x)}$
Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et alors $\exists m_q > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}^n$,
$m_q \|x\|_q \leq \|x\|$

② Soit y solution maximale de $y' = f(y)$ définie sur $]c;d[$ intervalle contenant 0.

Montrons que : $\exists \beta > 0 \mid (q \circ y)'(t) \leq -\beta \|y(t)\|_q$ pour $y(t)$ assez petit.

Soit $r : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto f(x) - Ax \end{array}$, $t \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$(q \circ y)'(t) = d_{y(t)} q \circ y'(t) \qquad q(x+h) = q(x) + \underbrace{2B(x;h)}_{= d_x q(h)} + q(h)$$
$$= 2B(y(t); y'(t))$$
$$= 2B(y(t); f(y(t)))$$
$$= 2B(y(t); Ay(t)) + 2B(y(t); r(y(t)))$$

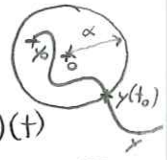
• Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a :
$$2B(x; Ax) = \int_0^{+\infty} 2\langle e^{tA}x ; e^{tA}Ax \rangle dt$$
$$= \left[\|e^{tA}x\|^2 \right]_0^{+\infty}$$
$$= -\|x\|^2 \quad \left(\text{car par le lemme, } \|e^{tA}x\|^2 \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \right)$$
$$\leq -m_q^2 \|x\|_q^2$$

• $f(x) \underset{0}{=} f(0) + d_0 f(x) + o(\|x\|)$
$\underset{0}{=} f(0) + d_0 f(x) + o(\|x\|_q)$

Ainsi, $r(x) = f(x) - d_0 f(x) = o(\|x\|_q)$
alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \mid \|x\|_q \leq \alpha \Rightarrow \|r(x)\|_q \leq \varepsilon \|x\|_q$
d'où : $|B(y(t); r(y(t)))| \leq \|y(t)\|_q \, \|r(y(t))\|_q$ (par Cauchy-Schwarz)
$\leq \varepsilon \|y(t)\|_q^2$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\beta := m_q^2 - 2\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que : $\|y(t)\|_q < \alpha$. Ainsi,
$$(q \circ y)'(t) \leq (-m_q^2 + 2\varepsilon) \|y(t)\|_q^2$$
$$\leq -\beta \|y(t)\|_q^2$$

③ Montrons que y est définie sur $\mathbb{R}_+$
Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y_0\|_q < \alpha$.
Montrons que : $\forall t \in [0; d[$, $\|y(t)\|_q < \alpha$.
Supposons par l'absurde qu'$\exists t \in]0; d[\; \|y(t)\|_q > \alpha$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires,
soit $t_0 := \inf \{ t \in [0; d[\mid \|y(t)\|_q = \alpha \}$.



Ainsi, $\boxed{\forall t < t_0, \|y(t)\|_q < \alpha}$ et alors :
$$(q \circ y)'(t) \leq -\beta \|y(t)\|_q^2 = -\beta (q \circ y)(t)$$
Par continuité de $(q \circ y)'$, lorsque $t \to t_0^-$,
$$(q \circ y)'(t_0) \leq -\beta (q \circ y)(t_0) = -\beta \alpha^2 < 0$$
Ainsi, il existe un voisinage de t_0 : $V \in \mathcal{V}_{t_0}$ où $t \mapsto (q \circ y)(t)$ est strictement décroissante.
Ainsi, $\forall t \in V$, $\boxed{t < t_0 \Rightarrow \|y(t)\|_q > \alpha}$
ABSURDE. Ainsi, $\forall t \in [0; d[$, $\|y(t)\|_q < \alpha$

Par le théorème de sortie de tout compact, la solution y est définie sur $\mathbb{R}_+ = [0;+\infty[$.

④ Montrons que $y(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Puisque $\forall t \in [0;+\infty[$, $\|y(t)\|_q < \alpha$, on a aussi :

$$(q\circ y)'(t) \leq -\beta (q\circ y)(t) \quad \text{pour tout } t\in[0;+\infty[$$

Alors $e^{\beta t}\left[(q\circ y)'(t) + \beta (q\circ y)(t)\right] \leq 0$

d'où : $\left[e^{\beta t}(q\circ y)(t)\right]' \leq 0$

L'application $t \mapsto e^{\beta t}(q\circ y)(t)$ est décroissante sur $[0;+\infty[$ et $\forall t\in[0;+\infty[$,

$$e^{\beta t}(q\circ y)(t) \leq e^{0}(q\circ y)(0) = q(y_0)$$

donc : $\|y(t)\|_q \leq e^{-\beta \frac{t}{2}} \|y_0\|_q$

Ainsi, la convergence est exponentielle.

Entraînements
18'02'' tolleau notes
14'20'' tolleau speed
19'35'' tool

Temps :
14' 12'' speechless
12' 00'' speechless